

分段三次曲线

分段三次曲线 特性

梯形加速曲线

加速完成后速度为2.0

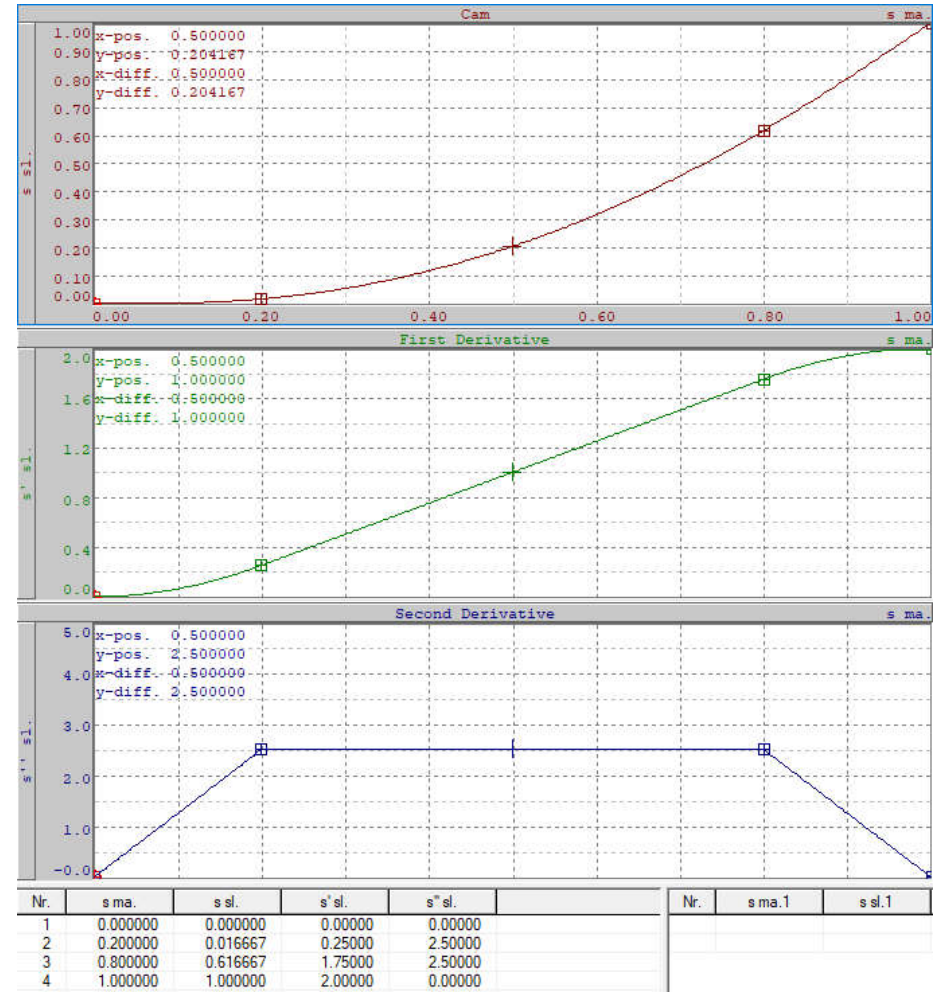
加速度关于 $x=0.5$ 轴对称

速度曲线关于 $x=0.5, v=1.0$ 中心对称

曲线有四个控制点，每个控制点四个参数

(x, y, y', y'') 对曲线有三个约束

两个点共有六个约束，确定一个5次曲线



分段三次曲线

参数计算——最大加速度

首先确定加速度调整段所占的比例 $R_a < 0.5$

最大加速度为 A

梯形的面积为终点的速度2

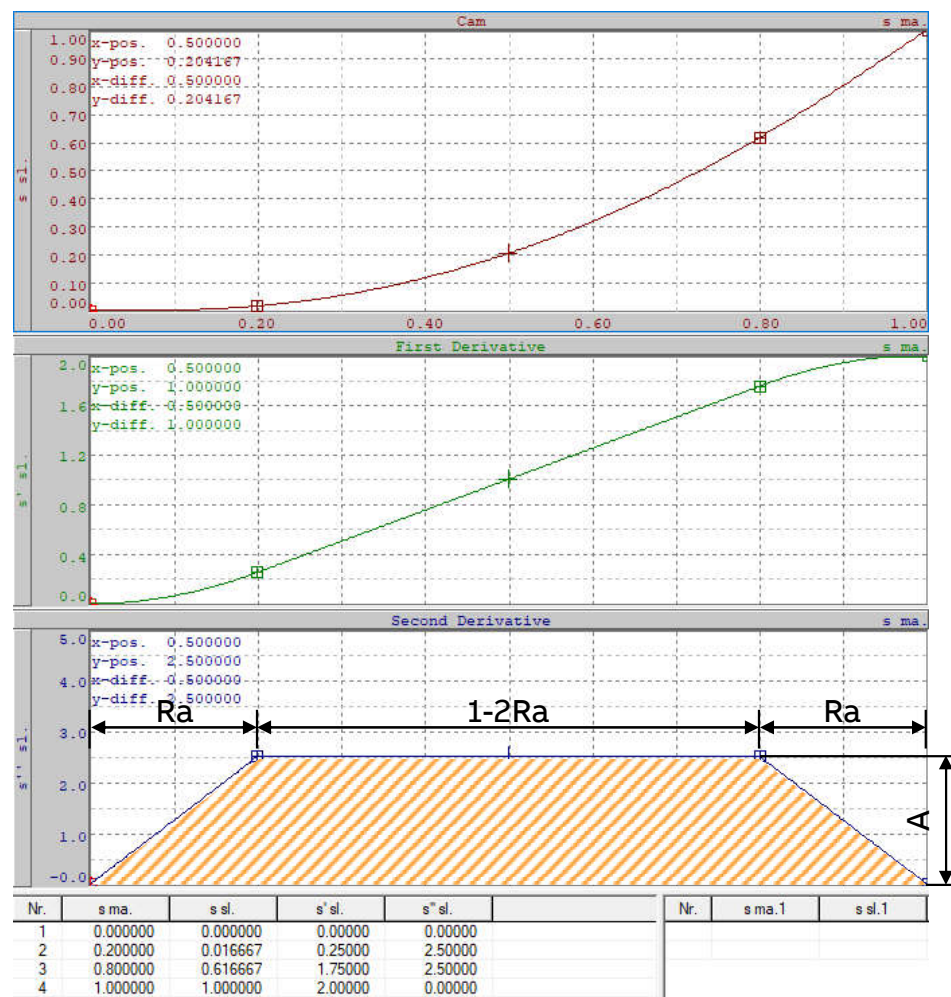
$$0.5(1 - 2R_a + 1)A = 2$$

$$(1 - R_a)A = 2$$

得

$$A = \frac{2}{1 - R_a}$$

$x = R_a$ 和 $x = (1 - R_a)$ 两个控制点处的加速度为 A



分段三次曲线

参数计算——速度

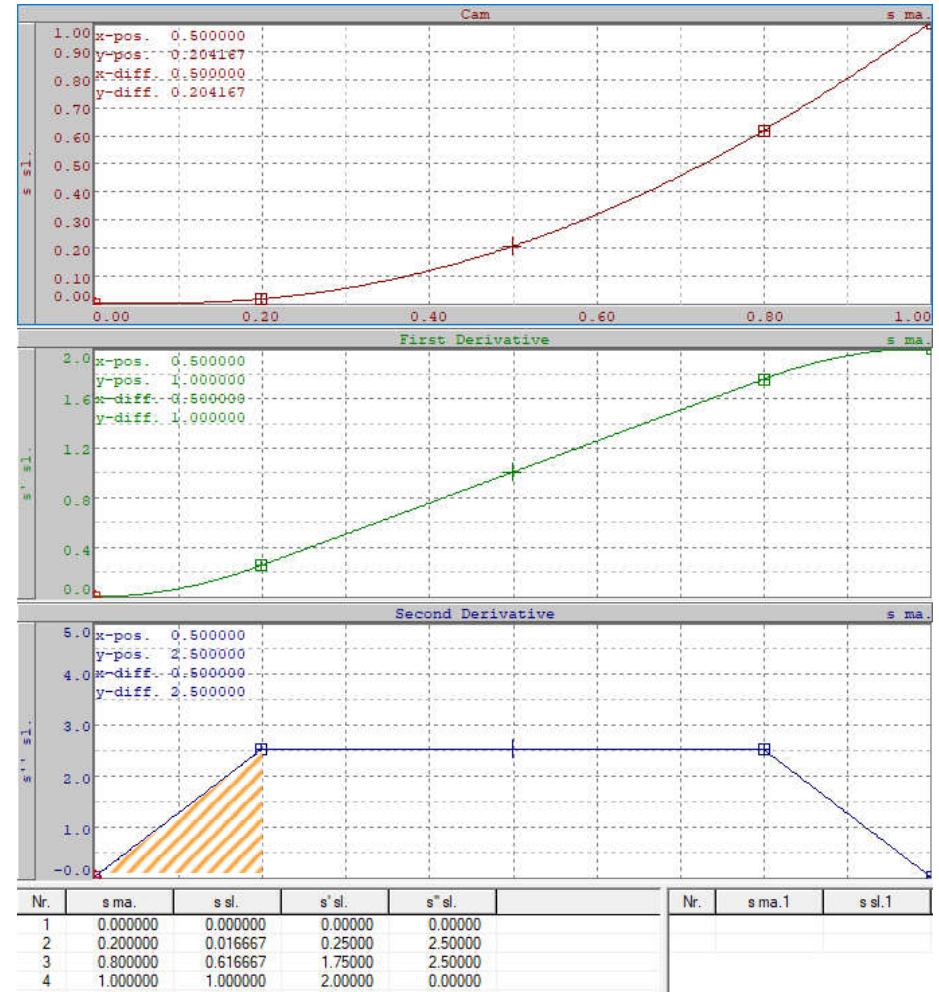
x=Ra处的速度为如图三角形的面积

$$V_1 = 0.5R_a A = 0.5R_a \frac{2}{1 - R_a} = \frac{R_a}{1 - R_a}$$

$$V_1 = \frac{R_a}{1 - R_a}$$

对于x=(1- R_a)处，由于加速度曲线的对称性，所以V₁ + V₂ =2

$$V_2 = 2 - V_1 = \frac{2 - 3R_a}{1 - R_a}$$



分段三次曲线

参数计算——位移

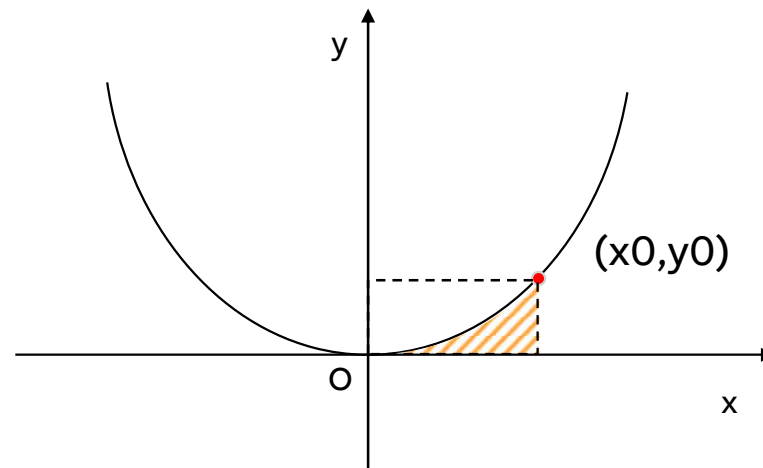
小知识

对称轴为y轴的经过 $(0,0)$ 点的开口向上的抛物线上的任意一点 (x_0, y_0) ，曲线与x轴和 $x=x_0$ 围成的图形的面积

$$S = \frac{x_0 y_0}{3}$$

证明：

$$S = \int_0^{x_0} ax^2 dx = \frac{ax^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=x_0} = \frac{ax_0^3}{3} = \frac{x_0 ax_0^2}{3} = \frac{x_0 y_0}{3}$$



分段三次曲线

参数计算——位移

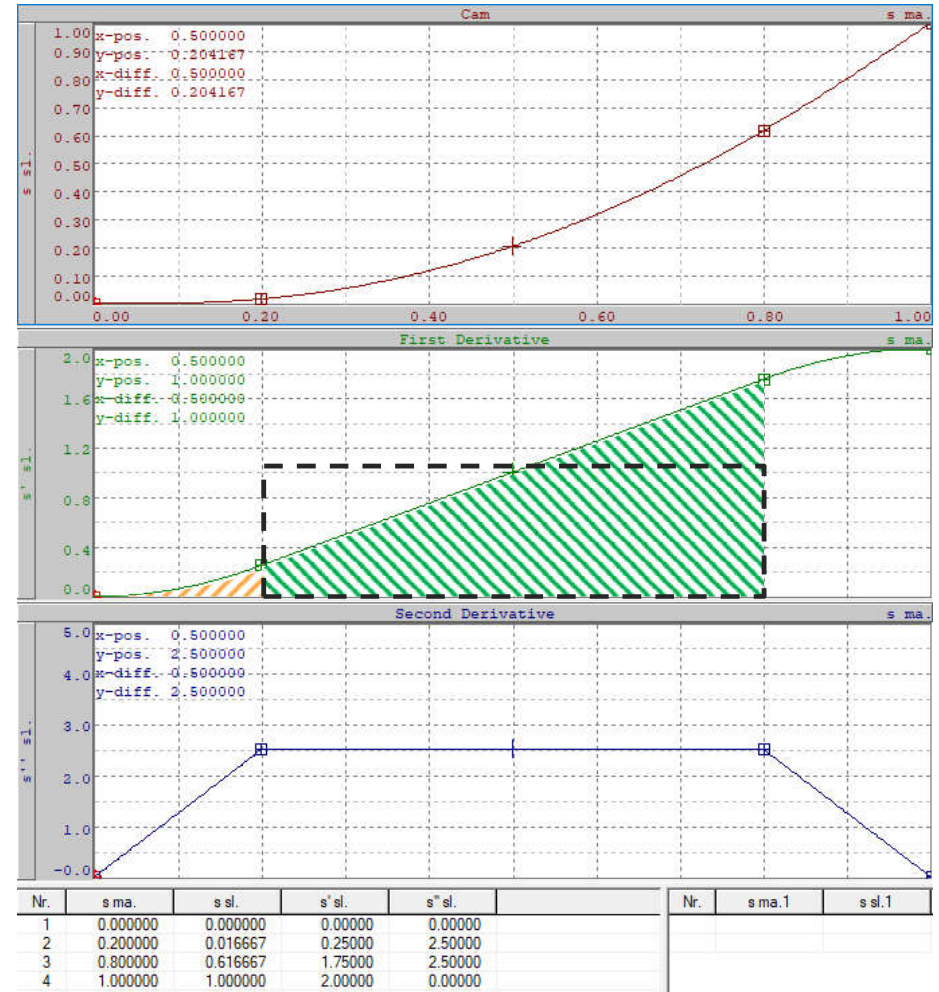
$x = R_a$ 处

$$S_1 = \frac{R_a V_1}{3} = \frac{R_a R_a}{3(1 - R_a)} = \frac{R_a^2}{3(1 - R_a)}$$

对于 $x = (1 - R_a)$ 处，由于从 R_a 到 $(1 - R_a)$ 速度曲线为一条斜线，且速度曲线必过点 $(0.5, 1)$ 所以从 R_a 到 $(1 - R_a)$ 的平均速度为 1，位移增量为

$$\Delta S = 1 * (1 - R_a - R_a) = 1 - 2R_a$$

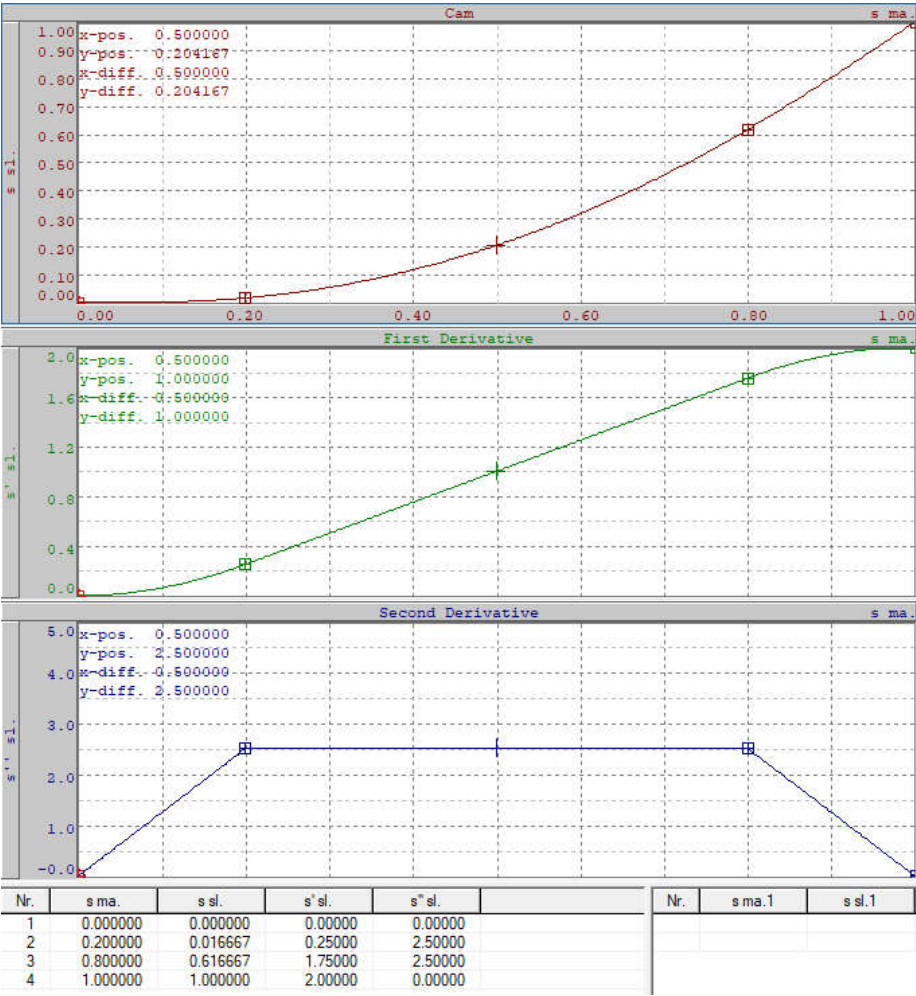
$$S_2 = S_1 + \Delta S = \frac{R_a^2}{3(1 - R_a)} + 1 - 2R_a$$



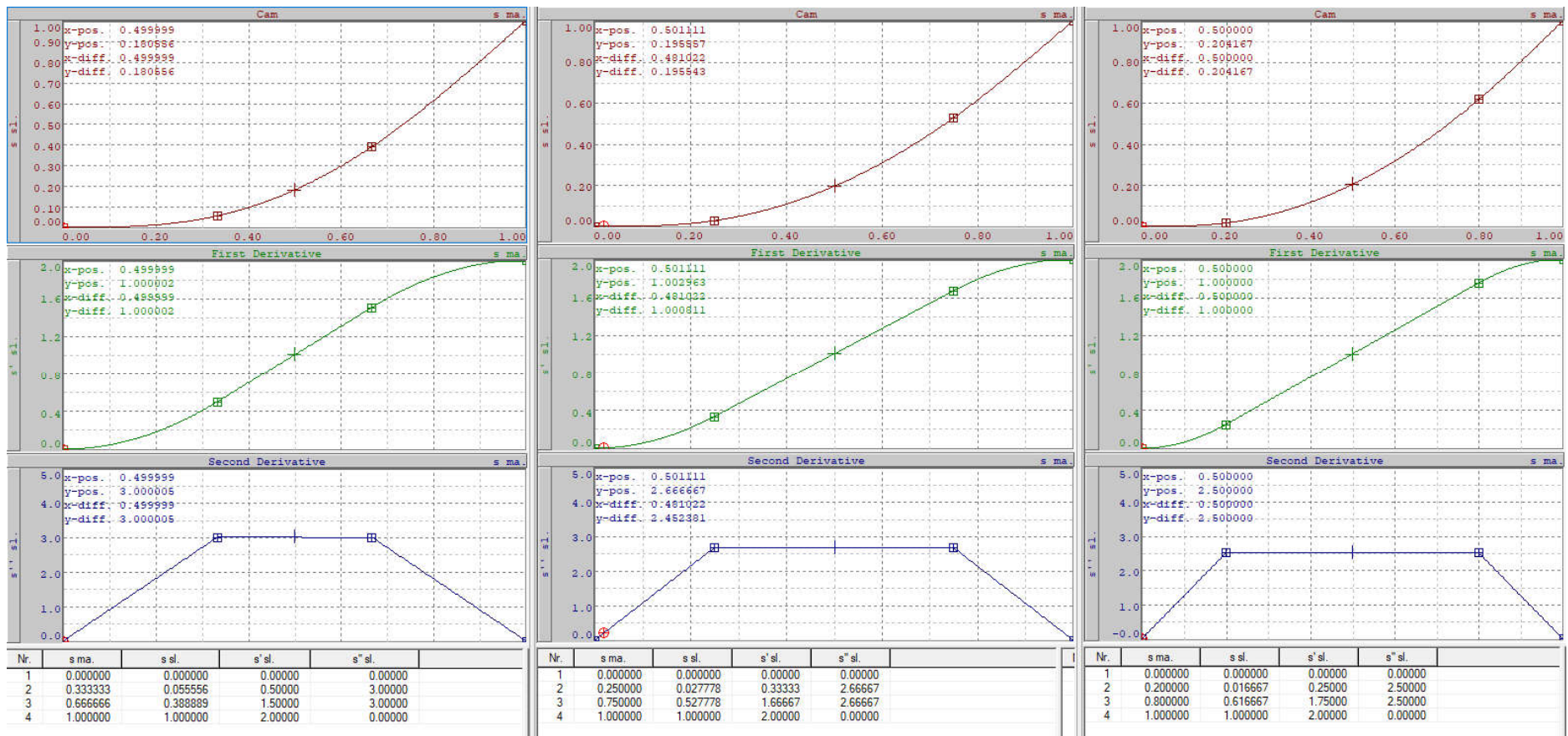
分段三次曲线

参数计算——总结

x	R_a	$1 - R_a$
y	$\frac{R_a^2}{3(1 - R_a)}$	$\frac{R_a^2}{3(1 - R_a)} + 1 - 2R_a$
y'	$\frac{R_a}{1 - R_a}$	$\frac{2 - 3R_a}{1 - R_a}$
y''	$\frac{2}{1 - R_a}$	$\frac{2}{1 - R_a}$



分段三次曲线 实例

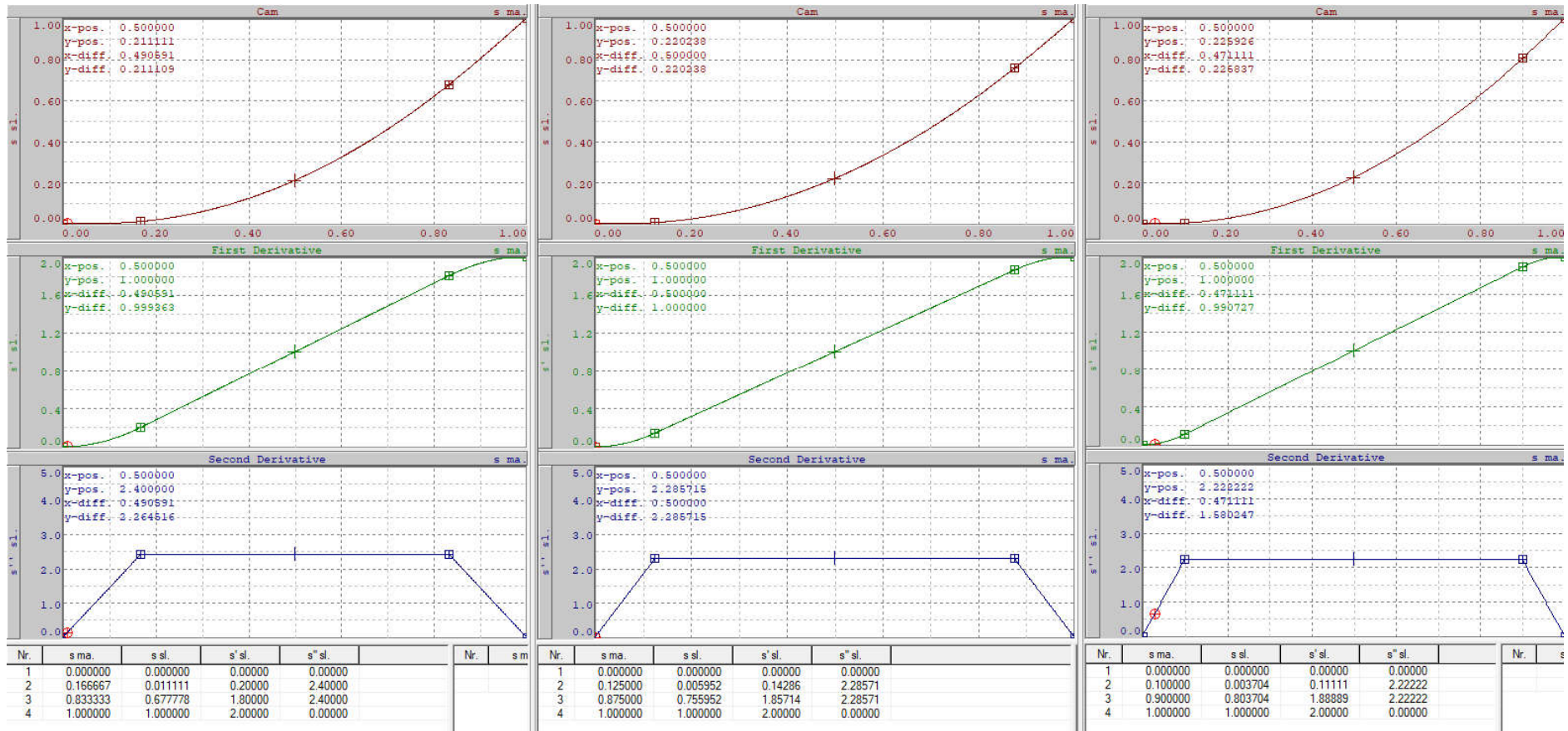


$Ra=1/3$ $A=3.0$

$Ra=1/4$ $A=8/3$

$Ra=1/5$ $A=2.5$

分段三次曲线 实例



Ra=1/6 A=2.4

Ra=1/8 A=16/7

Ra=1/10 A=20/9

分段四次曲线

分段四次曲线 特性

加加速曲线为抛物线，过度更平缓

加速完成后速度为2.0

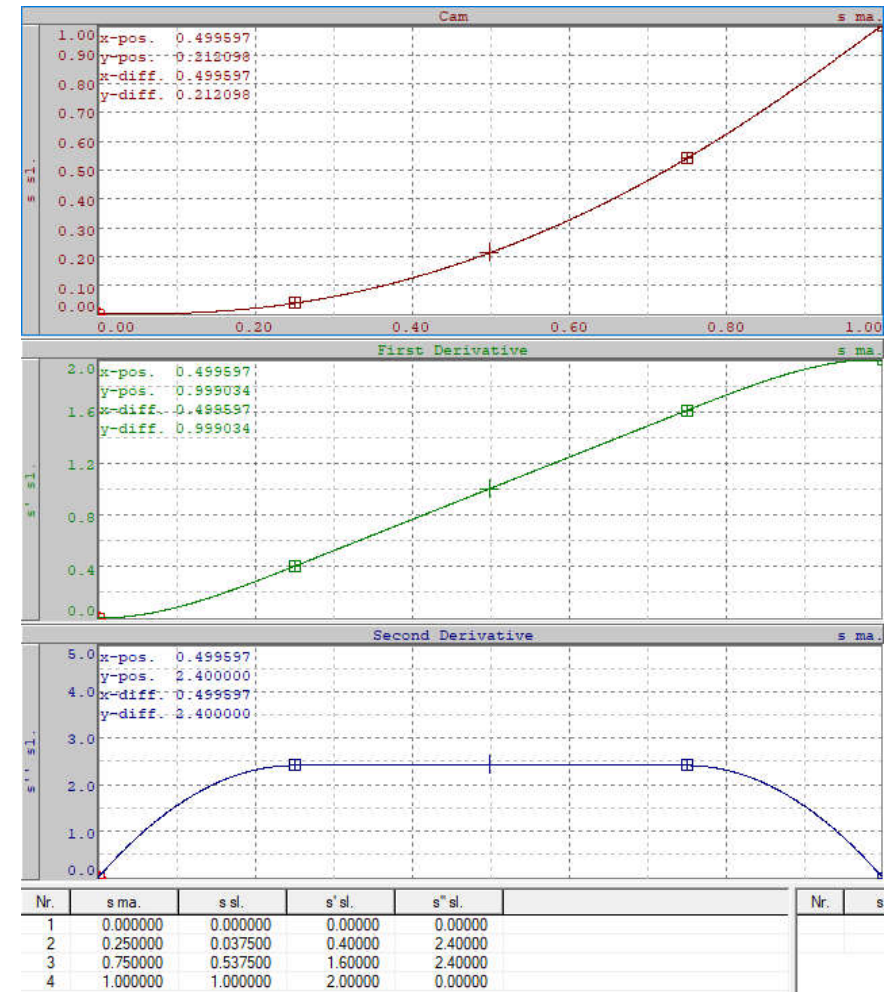
加速度关于 $x=0.5$ 轴对称

速度曲线关于 $x=0.5, v=1.0$ 中心对称

曲线有四个控制点，每个控制点四个参数

(x, y, y', y'') 对曲线有三个约束

两个点共有六个约束，确定一个5次曲线



分段四次曲线

参数计算——最大加速度

首先确定加速度调整段所占的比例 $R_a < 0.5$

最大加速度为 A

加加速部分的面积为 $\frac{2}{3} * R_a * A$

加速度曲线所围成的图形的面积为 2

$$2 * \frac{2}{3} * R_a * A + (1 - 2 R_a) * A = 2$$

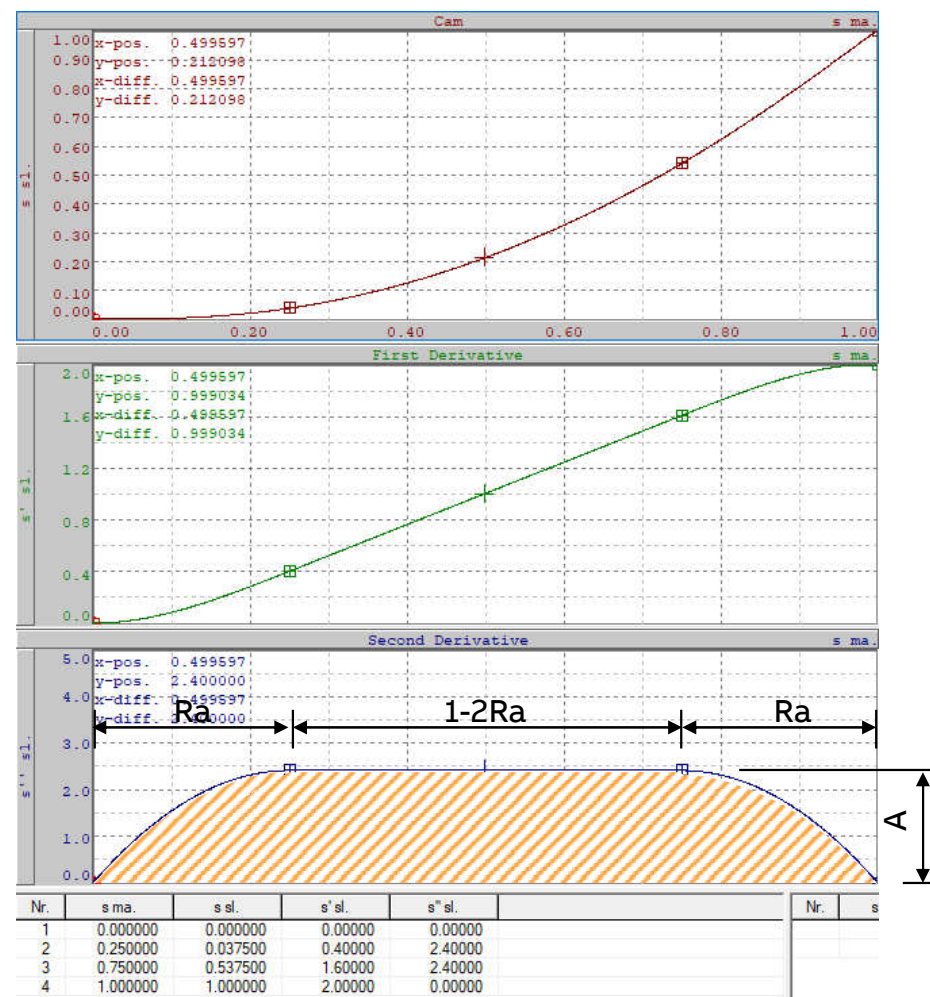
$$A (1 - \frac{2}{3} R_a) = 2$$

得

$$A = \frac{6}{3 - 2R_a}$$

$x = R_a$ 和 $x = (1 - R_a)$ 两个控制点处的加速度为 A

©B&R. All rights reserved



分段四次曲线

参数计算——速度

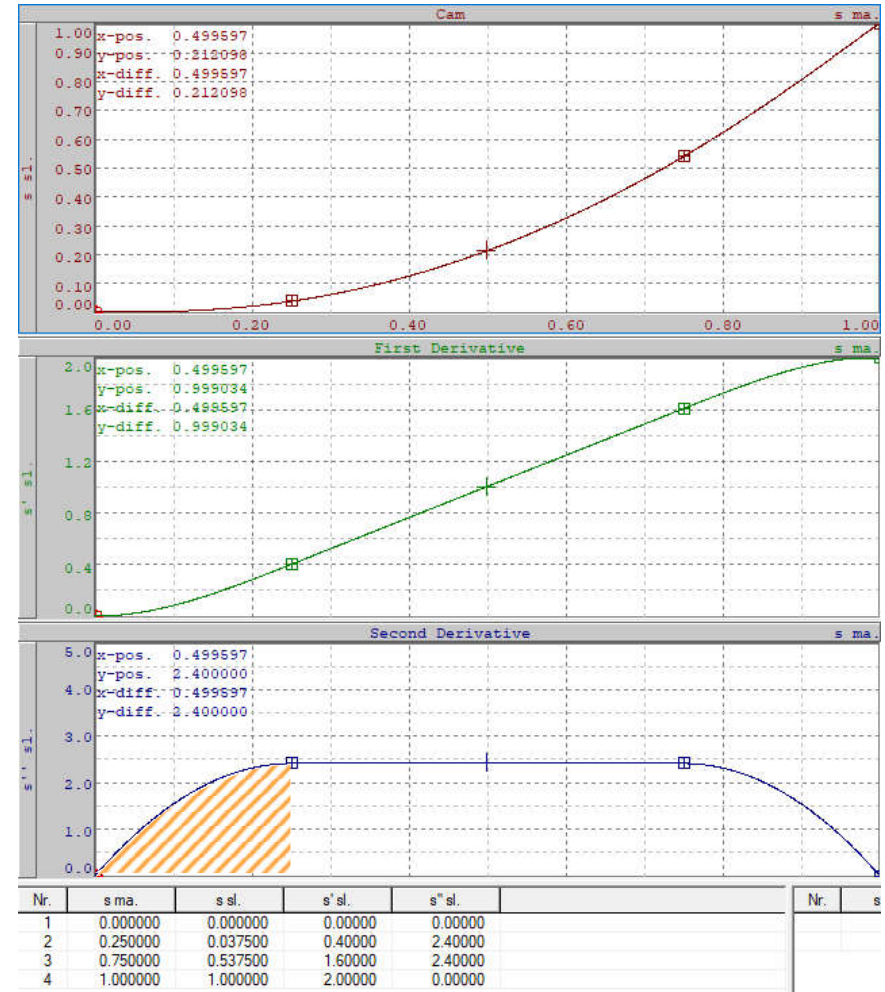
$x = R_a$ 处的速度为图中曲边三角形的面积

$$V_1 = \frac{2}{3} R_a A = \frac{2}{3} R_a \frac{6}{3 - 2R_a} = \frac{4R_a}{3 - 2R_a}$$

$$V_1 = \frac{4R_a}{3 - 2R_a}$$

对于 $x = (1 - R_a)$ 处，由于加速度曲线的对称性，所以 $V_1 + V_2 = 2$

$$V_2 = 2 - V_1 = \frac{6 - 8R_a}{3 - 2R_a}$$



分段四次曲线

参数计算——S1点位移

x=0处参数 (x, y, y', y'') 为 $(0, 0, 0, 0)$

可以确定四次曲线

$$y = \sum_{n=0}^4 a_n x^n$$
$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0$$

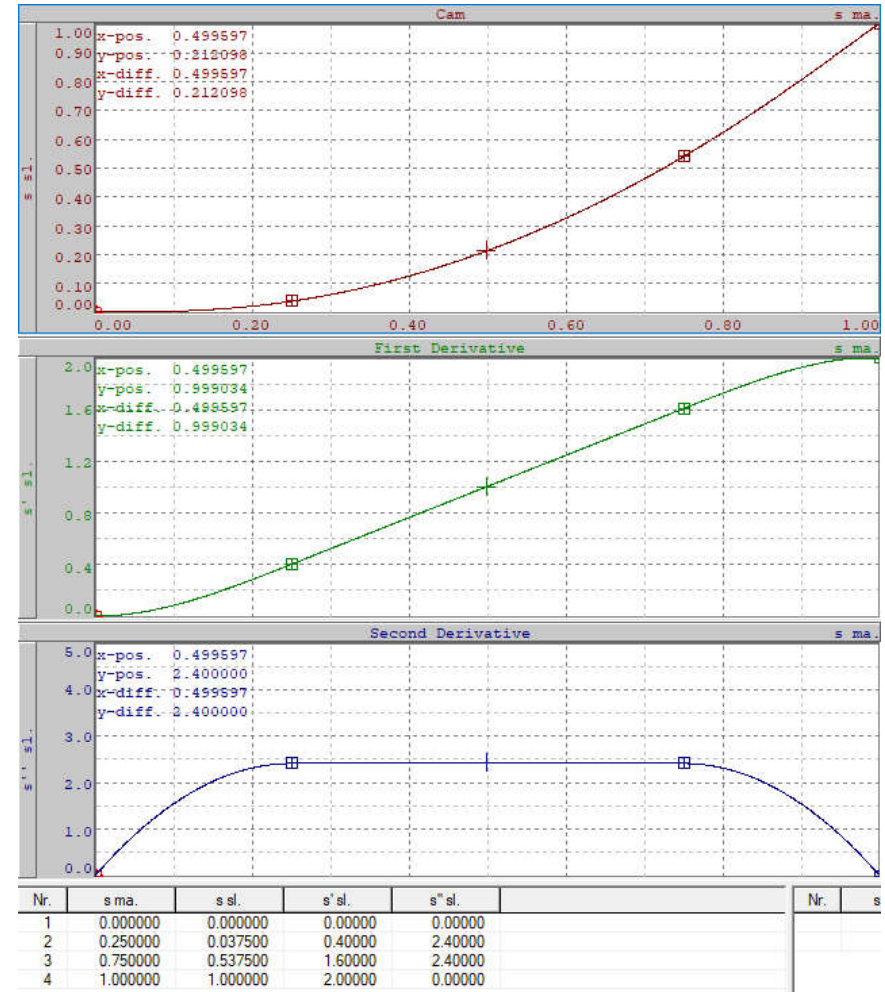
得

$$y = a_3 x^3 + a_4 x^4$$

则有

$$y' = 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3$$
$$y'' = 6a_3 x + 12a_4 x^2$$

©B&R. All rights reserved



分段四次曲线

参数计算——S1点位移

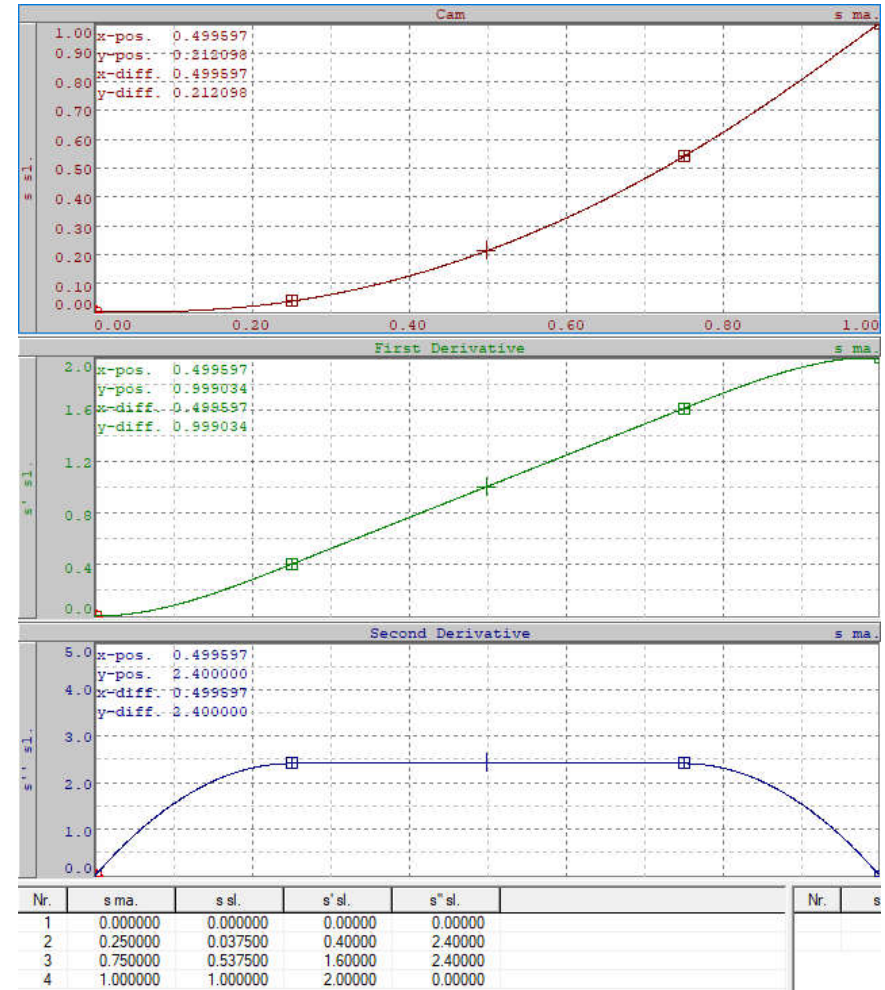
$X = R_a$ 时,

$$y' = \frac{4R_a}{3 - 2R_a}, \quad y'' = \frac{6}{3 - 2R_a}$$

$$\begin{cases} y' = 3a_3R_a^2 + 4a_4R_a^3 = \frac{4R_a}{3 - 2R_a} \\ y'' = 6a_3R_a + 12a_4R_a^2 = \frac{6}{3 - 2R_a} \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} a_3 = \frac{2}{(3 - 2R_a)R_a} \\ a_4 = \frac{-1}{2(3 - 2R_a)R_a^2} \end{cases}$$

©B&R. All rights reserved



分段四次曲线

参数计算——S1点位移

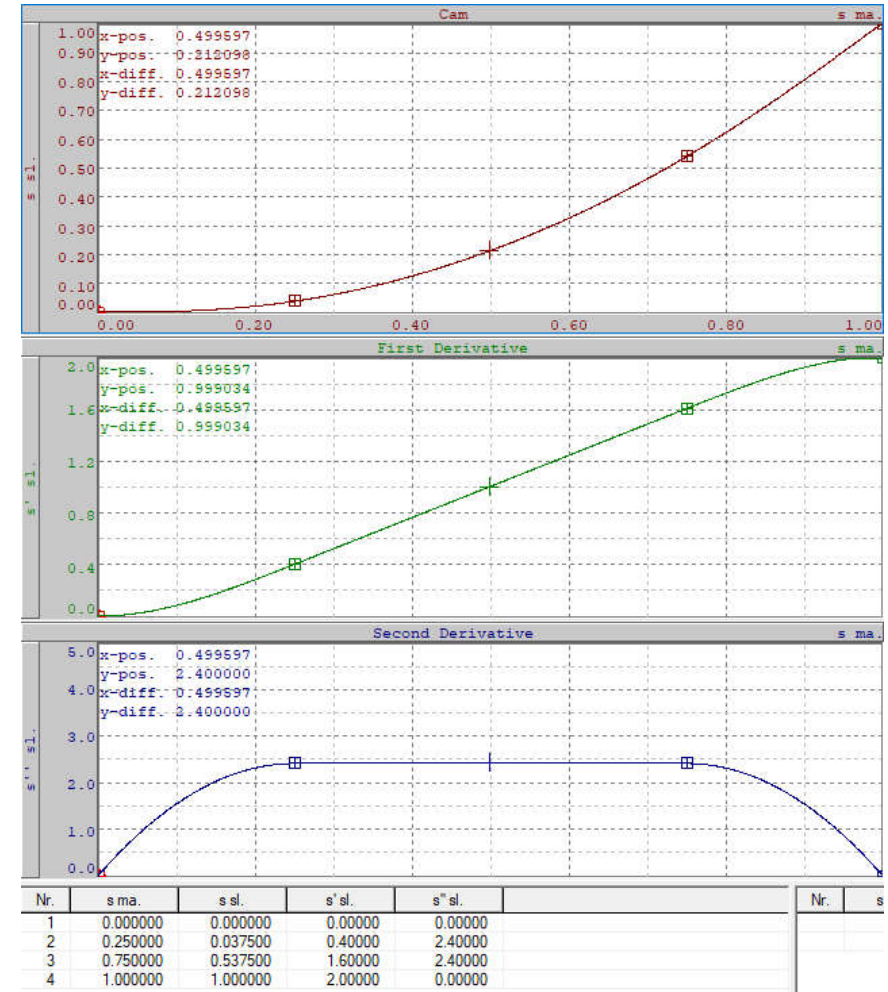
$$y = \frac{2x^3}{(3 - 2R_a)R_a} - \frac{x^4}{2(3 - 2R_a)R_a^2}$$

当 $x = R_a$,

$$S_1 = \frac{2R_a^3}{(3 - 2R_a)R_a} - \frac{R_a^4}{2(3 - 2R_a)R_a^2}$$

化简得

$$S_1 = \frac{3R_a^2}{2(3 - 2R_a)}$$



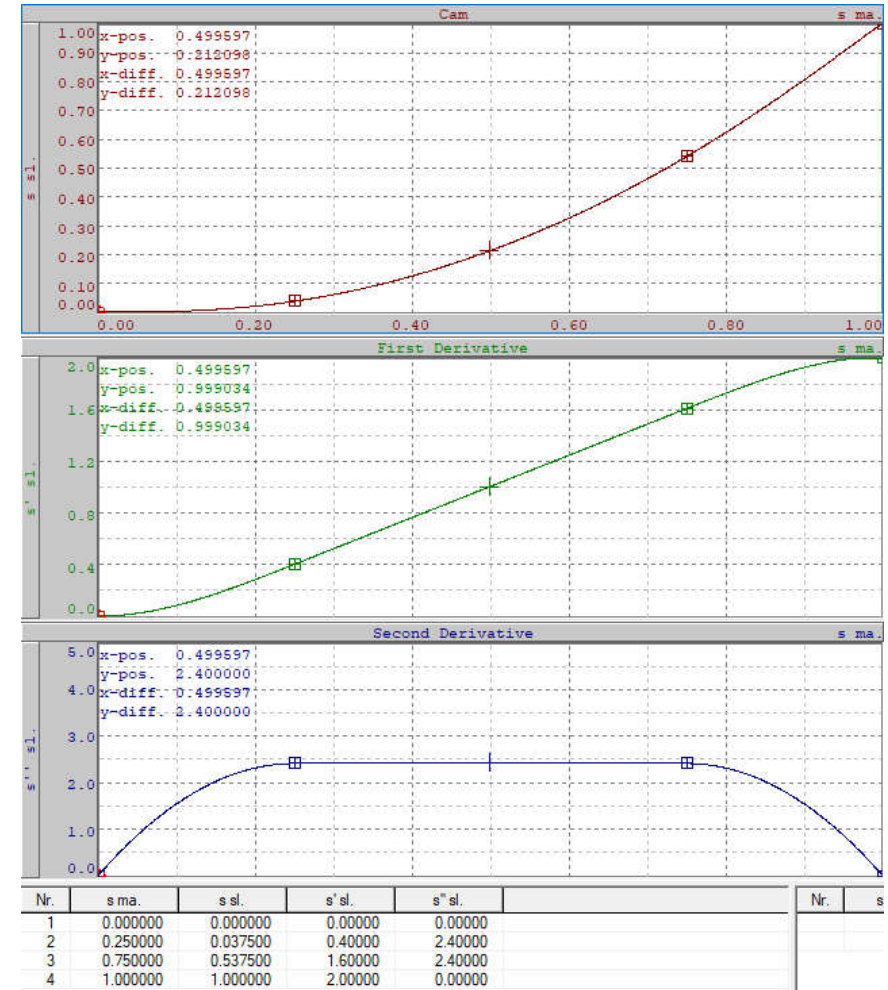
分段四次曲线

参数计算——S2点位移

对于 $x=(1-R_a)$ 处，由于从 R_a 到 $(1-R_a)$ 速度曲线为一条斜线，且速度曲线必过点 $(0.5,1)$ 所以从 R_a 到 $(1-R_a)$ 的平均速度为1，位移增量为

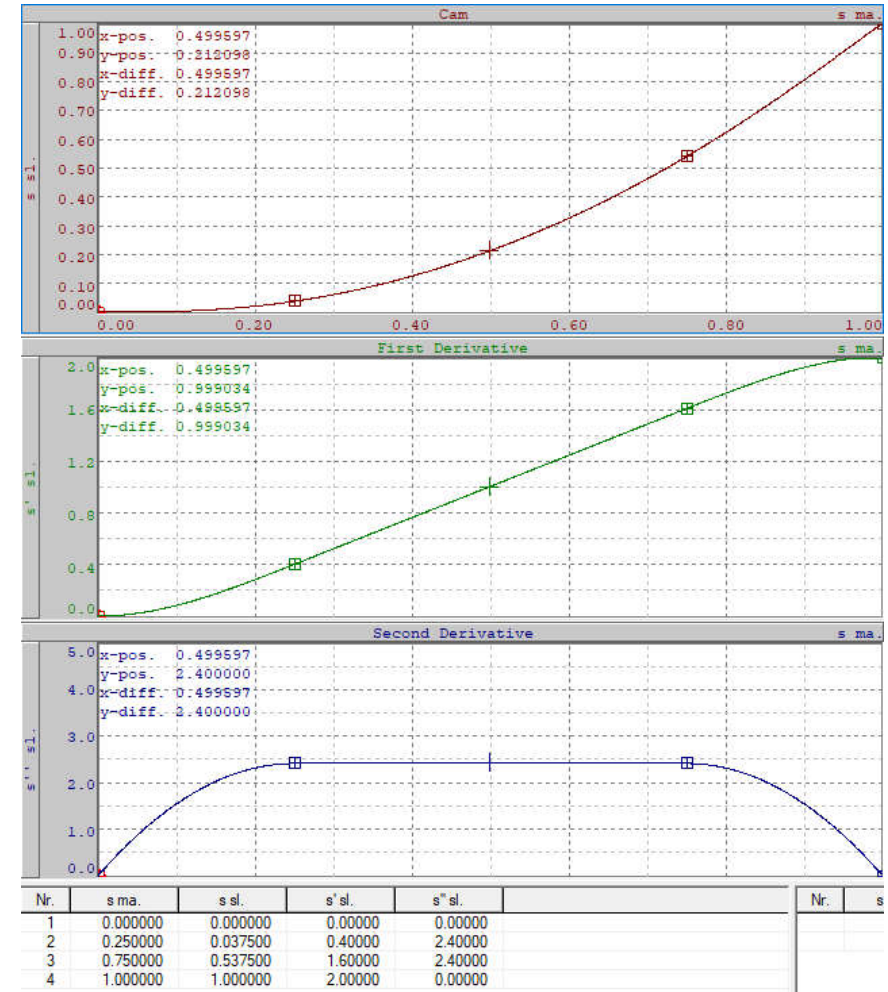
$$\Delta S = 1 * (1 - R_a - R_a) = 1 - 2R_a$$

$$S_2 = S_1 + \Delta S = \frac{3R_a^2}{2(3 - 2R_a)} + 1 - 2R_a$$

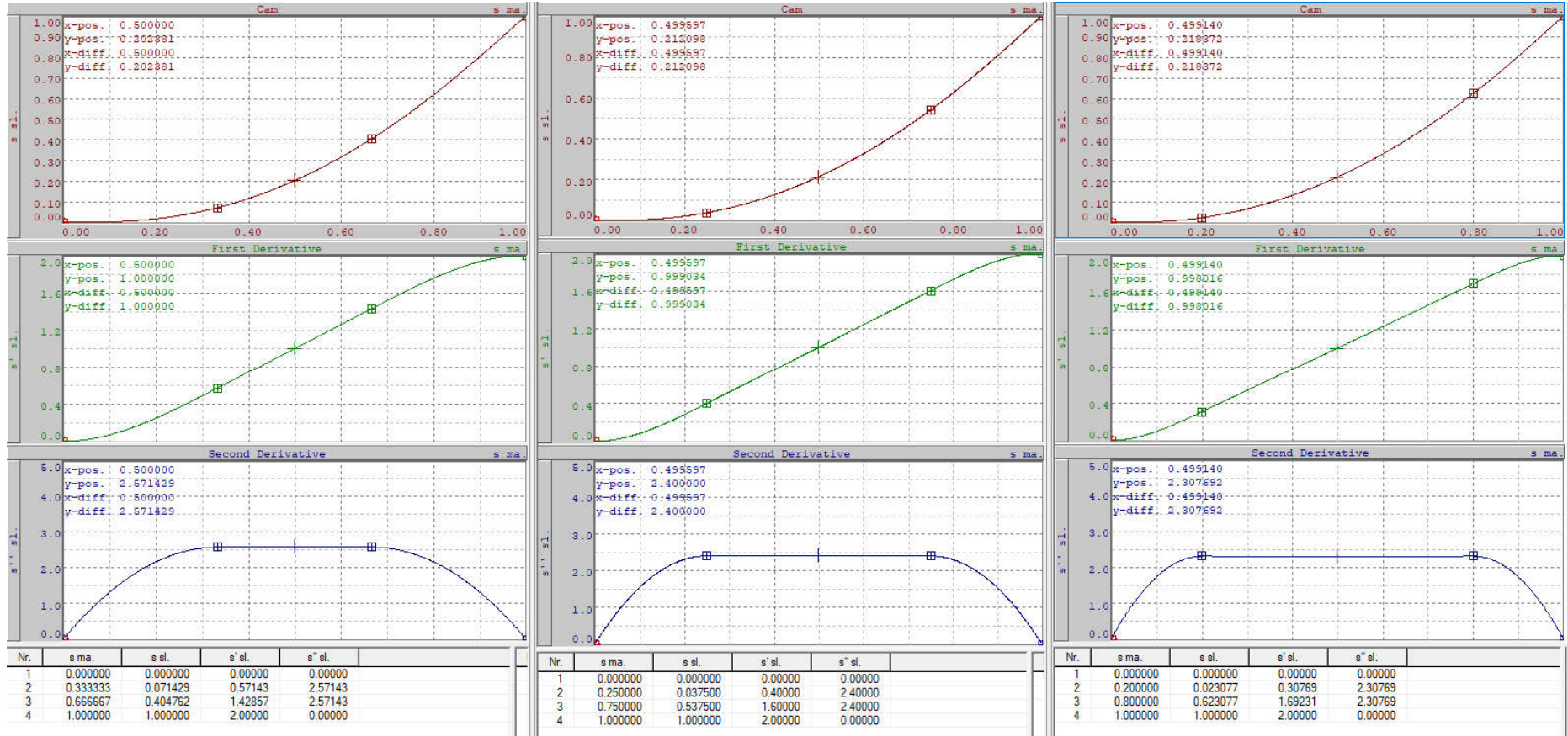


分段四次曲线 参数计算——总结

x	R_a	$1 - R_a$
y	$\frac{3R_a^2}{2(3 - 2R_a)}$	$\frac{3R_a^2}{2(3 - 2R_a)} + 1 - 2R_a$
y'	$\frac{4R_a}{3 - 2R_a}$	$\frac{6 - 8R_a}{3 - 2R_a}$
y''	$\frac{6}{3 - 2R_a}$	$\frac{6}{3 - 2R_a}$



分段四次曲线 实例

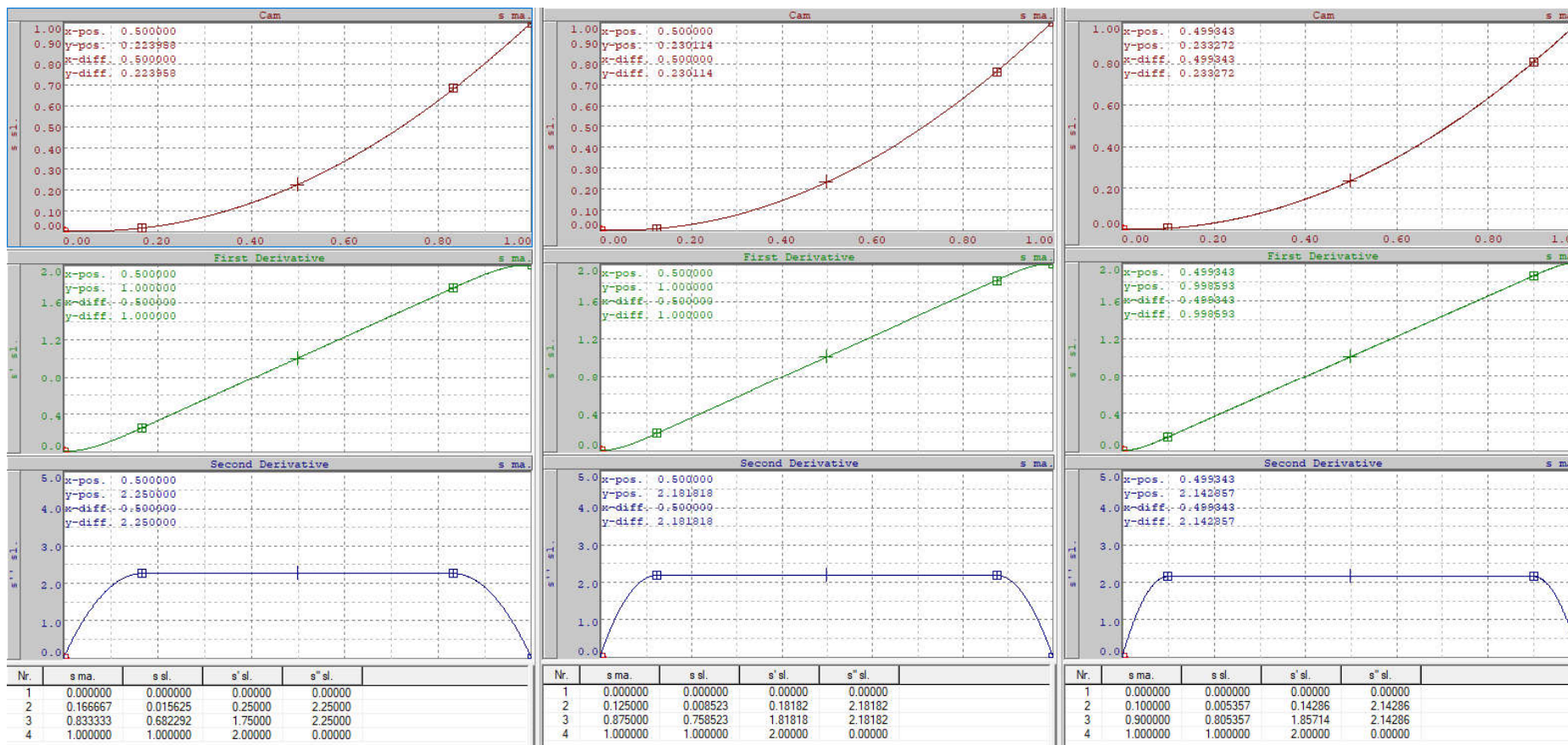


$Ra=1/3$ $A=18/7$

$Ra=1/4$ $A=2.4$

$Ra=1/5$ $A=30/13$

分段四次曲线 实例



$Ra=1/6$ $A=2.25$

$Ra=1/8$ $A=24/11$

$Ra=1/10$ $A=15/7$